

ΘΕΜΑ 1 (2.0 M)

Βρείτε τον όγκο που αποκόπτουν από τον κύλινδρο $x^2 + z^2 = 1$ οι επιφάνειες $y = -x^2$ και $y = x^2 + z^2$. Δίνεται $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε κατάλληλες κυλινδρικές συντεταγμένες.

ΘΕΜΑ 2 (1.5 M)

Δείξτε ότι αν η $w = f(u, v)$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$ και αν

$u = (x^2 - y^2)/2$ και $v = xy$ τότε η w ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$.

ΘΕΜΑ 3 (1.5 M)

Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x, y, z) = \sin(xy) + e^{xyz} + \ln(xz)$ στο σημείο

$P(1, 0, 1)$ στην κατεύθυνση $\vec{R} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ 1

Θεωρώ κυλινδρικές συντεταγμένες με αναλλοίωτο άξονα τον y και άρα έχουμε $x = r \cos \vartheta, y = y, z = r \sin \vartheta, dV = r dy dr d\vartheta$.

Δεδομένου ότι τα x, z παίρνουν τιμές στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + z^2 = 1$ θα έχουμε $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Όσο για το y , αυτό θα παίρνει τιμές μεταξύ των δύο επιφανειών που τέμνουν τον κύλινδρο

$$-x^2 \leq y \leq x^2 + z^2 \Rightarrow -(r \cos \vartheta)^2 \leq y \leq (r \cos \vartheta)^2 + (r \sin \vartheta)^2 \Rightarrow -r^2 \cos^2 \vartheta \leq y \leq r^2$$

Ο όγκος που ζητάμε άρα είναι το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-r^2 \cos^2 \vartheta}^{r^2} r dy dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r [y]_{-r^2 \cos^2 \vartheta}^{r^2} dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r^2 + r^2 \cos^2 \vartheta) dr d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (1 + \cos^2 \vartheta) dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} \right) d\vartheta = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\vartheta d\vartheta \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} (2\pi) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2\vartheta}{2} \right]_0^{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3\pi + \frac{1}{4} (\sin 4\pi - \sin 0) \right] = \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

$$\left. \begin{array}{l} u = (x^2 - y^2)/2 \\ v = xy \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial x = x \\ \partial u / \partial y = -y \\ \partial v / \partial x = y \\ \partial v / \partial y = x \end{array} \right.$$

Εφαρμόζω τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης επισημαίνοντας ότι τα f και w είναι ουσιαστικά η ίδια συνάρτηση.

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f_u \cdot x + f_v \cdot y \\ w_{xx} &= \frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (f_u \cdot x + f_v \cdot y) = \frac{\partial f_u}{\partial x} x + f_u \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial x} y + f_v \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f_u}{\partial x} x + f_u + \frac{\partial f_v}{\partial x} y + 0 \end{aligned}$$

Τα f_u, f_v είναι συναρτήσεις των u και v . Άρα από τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης

$$\begin{cases} \frac{\partial f_u}{\partial x} = \frac{\partial f_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f_{uu}x + f_{uv}y \\ \frac{\partial f_v}{\partial x} = \frac{\partial f_v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = f_{vu}x + f_{vv}y \end{cases}$$

$$w_{xx} = (f_{uu}x + f_{uv}y)x + f_u + (f_{vu}x + f_{vv}y)y = x^2 f_{uu} + y^2 f_{vv} + xy(f_{uv} + f_{vu}) + f_u$$

Ομοίως

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -f_u \cdot y + f_v \cdot x$$

$$w_{yy} = \frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-f_u \cdot y + f_v \cdot x) = -\frac{\partial f_u}{\partial y} y - f_u \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f_v}{\partial y} x + f_v \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\partial f_u}{\partial y} y - f_u + \frac{\partial f_v}{\partial y} x + 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_u}{\partial y} = \frac{\partial f_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -f_{uu}y + f_{uv}x \\ \frac{\partial f_v}{\partial y} = \frac{\partial f_v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_v}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -f_{vu}y + f_{vv}x \end{cases}$$

$$w_{yy} = -(-f_{uu}y + f_{uv}x)y - f_u + (-f_{vu}y + f_{vv}x)x = x^2 f_{vv} + y^2 f_{uu} - xy(f_{uv} + f_{vu}) - f_u$$

$$\text{Όποτε } w_{xx} + w_{yy} = x^2 f_{uu} + y^2 f_{vv} + x^2 f_{vv} + y^2 f_{uu} = (x^2 + y^2)(f_{uu} + f_{vv}) = (x^2 + y^2) \cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ 3

Η παράγωγο κατά κατεύθυνση δίνεται από τη σχέση

$$(D_{\hat{R}}g)_P = \vec{\nabla}g(P) \cdot \hat{R}$$

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3}$$

$$\vec{\nabla}g(x, y, z) = g_x \hat{i} + g_y \hat{j} + g_z \hat{k}$$

$$g_x(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x} = y \cos(xy) + yze^{xyz} + z \frac{1}{xz} \Rightarrow g_x(1, 0, 1) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$g_y(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial y} = x \cos(xy) + xze^{xyz} \Rightarrow g_y(1, 0, 1) = 1 + 1 = 2$$

$$g_z(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial z} = xyz e^{xyz} + x \frac{1}{xz} \Rightarrow g_z(1, 0, 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Άρα } (D_{\hat{R}}g)_P = \vec{\nabla}g(P) \cdot \hat{R} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \left(\frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3} \right) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}$$